De la croissance exponentielle - Le blog de l'énergie et du climat

climatenergie

31 juillet 2011 7 31 /07 /juillet /2011 07:31

Une des caractéristiques les plus frappantes du développement de la société moderne est l'apparition d'une croissance économique et démographique inédite dans l'histoire de l'humanité. Cette croissance s'est tellement inscrite dans nos habitudes qu'elle est maintenant considérée comme la situation "normale" de l'économie, qui vise à atteindre une croissance suffisante pour assurer le plein emploi et la bonne santé générale de la société. Une croissance excessive peut être considérée comme une "surchauffe", un manque de croissance comme un défaut, une récession comme une crise. Il semble donc qu'il y ait plus ou moins un taux de croissance "idéal". Un physicien ne peut qu'être intrigué par cette notion : pourquoi après tout y aurait-il un "bon" taux de croissance plutot qu'un autre ? et ce taux est-il vraiment durable? peut-on faire de la croissance indéfinie dans un monde limité ? des réponses contradictoires ont été apportées à ces questions. Pour des analyses comme dans le rapport Meadows, lié à ce qu'on appelé le "club de Rome", publié en 1972, dont il a été fait allusion ici, la croissance est vouée tôt ou tard à rencontrer des limites physiques. Dans le meilleur des cas, elle tendra vers zéro , correspondant à une stabilisaion de la société, ou dans le pire des cas , elle mènera à son effondrement. Pour d'autres, s'appuyant sur le fait que les prédictions du club de Rome ne sont pas réalisées, il est au contraire possible d'imaginer une croissance durable outrepassant les limites physiques. Je vais expliquer ici pourquoi ma position personnelle est clairement la première, et que le club de Rome a développé des idées inattaquables mathématiquement.

Il faut d'abord rappeler quelques propriétés mathématiques fondamentales de l'exponentielle; ces propriétés sont bien connues de certains lecteurs, mais peut-être pas de tous, et même ceux familiers avec cette fonction n'ont peut être pas toujours réalisé certaines de ses conséquences pratiques. Pour ne pas être trop long je ne ferai que ces rappels mathématiques dans un premier post, avant de développer les conséquences "humaines" de ces propriétés mathématiques.

La croissance exponentielle apparaît naturellement dans un certain nombre de situations dont la caractéristique commune, qui se rencontre assez couramment, est la suivante : **une quantité X varie exponentiellement avec le temps quand elle est "auto-reproductice à taux constant", dans le sens où sa vitesse de variation est proportionnelle à la quantité X elle même.**

C'est une situation qui se rencontre souvent, mais qui n'est pas générale. Par exemple si vous remplissez une baignoire avec un robinet ouvert, la vitesse de remplissage est constante, mais elle ne dépend pas de la quantité d'eau dans la baignoire. Ce n'est donc pas une croissance exponentielle, mais linéaire. En revanche, si vous élevez des lapins, et que vous les laissiez se reproduire à un taux constant, le nombre de naissance sera proportionnel au nombre de lapins et ils croitront exponentiellement. De façon générale, les espèces vivantes ont une tendance naturelle à la croissance exponentielle. De même si vous alimentez un compte sans interêt avec une partie constante de votre salaire, tant que ce dernier n'augmente pas, la somme déposée sur le compte croît, mais linéairement. En revanche si il y a des interêts que vous reversez sur le compte, la croissance est exponentielle, car les interêts croissent proportionnellement à la somme versée.

Une petite remarque, c'est qu'une croissance exponentielle ne signifie pas forcément AU DEBUT très rapide , comme on le croit parfois : si vous partez d'un couple de lapins et que vous voulez un élevage industriel de 1000, c'est bien plus rapide d'en acheter que d'attendre qu'ils se reproduisent. De même pour vous constituer une épargne, en principe les interêts placés sur un euro suffiraient, mais c'est quand même plus rapide de l'alimenter avec votre salaire; ce qu'on va voir en revanche, c'est qu'il existe toujours un temps au bout duquel la croissance exponentielle finit par être plus rapide que n'importe quelle croissance linéaire (et même polynomiale, incluant les carrés, les cubes.. et toutes les puissances niemes du temps) donnée à l'avance.

La traduction mathématique de la condition d'auto reproductivité est une équation liant la vitesse de variation , qui est mathématiquement la dérivée d A/dt , à la quantité A elle même , du type

$$dA/dt = k A$$

que nous appellerons "équation différentielle fondamentale".

k est dite la "constante" de l'exponentielle, elle joue un rôle très important. C'est le rapport entre la vitesse et la quantité A elle même , supposé donc constant dans l'hypothèse

k = dA/dt / A

dimensionnellement, k doit s'exprimer comme l'inverse d'un temps , un "par unité de temps". Son interprétation est très simple, c'est juste l'accroissement relatif pendant cette unité de temps. k n'est donc autre chose que le "taux de croissance", qu'on exprime souvent en % par an : un taux de croissance démographique de 2% par an signifie que k = 0,02 an^-1. (2% = 2/100 = 0,02), exprimant que chaque année, la population croit à raison de 2 individus par 100 au départ. De même, k représente aussi le taux d'interêt d'un livret. Si vous avez un placement à 5 % par an , k = 0,05 an^-1 (le an^-1 ou "par an" est souvent omis, mais il est fondamental, ce n'est pas du tout pareil de croitre de 5 % en un an, en un jour, ou en un siècle!!)

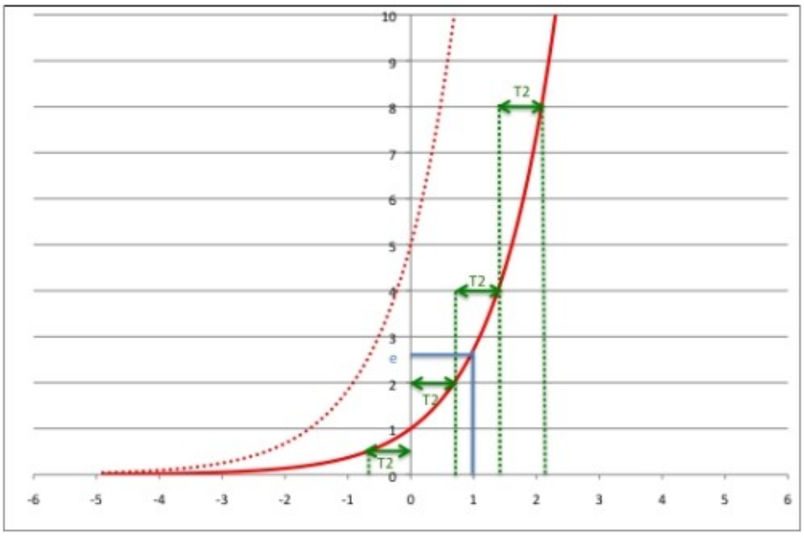
En réalité il y a une minuscule approximation parce que k représente l'accroissement en supposant que A soit resté constant dans l'intervalle, c'est à dire en négligeant la variation de A pendant l'année par exemple. Or ce n'est pas tout à fait vrai; les interêts sont versés tous les 15 jours par exemple, la somme a augmenté pendant l'année, ce qui fait que le taux d'interêt REEL pendant un an n'est pas tout à fait k, mais en est très proche pour les "petites valeurs" de k; nous donnerons son expression exacte plus tard.

la solution de l'equation précédente définit justement l'exponentielle. Precisément elle s'exprime par la solution

A(t) = Ao exp (kt)

ici on retrouve k et on a du introduire une "quantité initlale" Ao qui représente la valeur "initiale" de t au temps t=0. C'est une caractéristique universelle des équations différentielles de ne pouvoir etre résolue qu'en la complétant pas une "condition initiale".

La fonction exponentielle a plusieurs propriétés extraordinaires et joue un rôle fondamental en mathématiques. Par définition, exp(0) = 1 (en réalité la fonction exponentielle est définie comme l'unique fonction obeissant à l'équation différentielle fondamentale et dont la valeur en 0 est 1). On a donc bien A = Ao pour t =0.



Représentation de la fonction exp(x) (qui correspond à k = 1) (en trait plein rouge). Comme expliqué dans le texte, un même intervalle de temps T2 = ln(2) = 0,693 sépare tous les moments où la fonction est multipliée par 2 : ainsi les temps où l'exponentielle vaut 1/2, 1, 2, 4 et 8 sont tous séparés de T2, le "temps de doublement".

En pointillés rouges est représentée la même courbe avec une échelle mutipliée par 5 : elle est en fait obtenue en décalant temporellement la courbe initiale par ln(5). D'une certaine façon, la forme de l'exponentielle est invariante et unique : toute croissance exponentielle sera représentée par cette courbe en adaptant les échelles. Il faut mettre "1/k" au lieu de 1 en abscisse, et choisir l'ordonnée à t=0 pour que ce soit la valeur initiale A0. On retrouvera alors exactement la même courbe.

exp(1) est un nouveau nombre , appelé simplement "e". Comme π, c'est un nombre mathématique fondamental dont la valeur numérique doit être calculée , il faut environ e = 2,718281828 (il est curieusement très facile de se rappeler les 9 premières décimales parce qu'il a la caractéristique extraordinaire de répéter 2 fois la même séquence "1828" à partir de la deuxième.. Il n'y a qu'un nombre sur 10 000 ayant cette propriété, bizarrement très peu connue et n'ayant pas du tout intéressé les mystiques , contrairement aux décimales de π, qui en revanche n'ont elles rien d'extraordinaire.. sans doute parce que e est moins populaire parce qu'un peu plus difficile à introduire mathématiquement que pi !)

e représente le facteur d'accroissement de la quantité au bout d'un temps 1/k, l'inverse de k. Par exemple si k = 2 % par an, l'inverse de k est 100/2 an = 50 ans. Au bout de 50 ans, une somme initiale placée à 2% par an avec reversement des interêts aura augmenté de e = 2,7 environ. De même une population croissant à 2% par an aura été multipliée par e=2,7 au bout de 50 ans.

D'une façon générale, l'exponentielle a une propriété mathématique fondamentale, l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles, soit

exp(A+B) = exp(A) exp(B),

que nous appellerons "relation fondamentale" de l'exponentielle.

Une autre fonction liée est le logarithme naturel ln , qui est la fonction "réciproque" : c'est à dire que le logarithme de X est le nombre Y **dont X est l'exponentielle** : si X = exp(Y), alors Y = ln(X). Evidemment exp(ln(X)) = X = ln(exp(X))

en utilisant ces relations, on démontre facilement la propriété inverse du logarithme : le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes ln(A.B) = ln(A) + ln(B).

A partir de ces relations, nous allons établir une propriété fondamentale du comportement d'une exponentielle :

au bout d'un certain intervalle de temps ΔT, l'exponentielle est multipliée toujours par le même facteur C , qui vaut

C = exp(k.ΔT)

c'est une conséquence directe de la relation fondamentale. Si A vaut A1 à un temps t1, et A2 au temps t2=t+Δt, alors

A1 = Ao exp(k.t1) et A2 = Ao exp(k. t2) = Ao exp[k.(t1+Δt)] = Ao exp(k.t1).exp(k.Δt) = [exp(k.Δt)] x Ao exp(k.t1) = C. A1

Reciproquement : si on se donne un facteur multiplicatif donné C à l'avance, alors ce facteur multiplicatif sera obtenu TOUJOURS AU BOUT DU MEME INTERVALLE DE TEMPS , quel que soit la valeur initiale, et ce temps vaut ΔTc = ln(C) /k

(en effet si C = exp(k.ΔT) alors k.ΔT = ln(C))

La notation ΔTc rappelle qu'il s'agit du temps au bout duquel la quantité initiale est multipliée par C.

Le lecteur un peu habile démontrera sans peine que ΔTe = 1/k (temps au bout duquel la propriété est multipliée par e).

plutot que la multiplication par e, qui n'est pas un nombre très facile à retenir, on caractérise plutot la multiplication par 2, ce qui définit le temps de doublement T2 = ln(2)/k.

ln(2), le nombre x tel que exp(x) = 2, est un nombre qu'on peut calculer numériquement et qui vaut environ 0,693... =0,7 environ. On a donc T2 = 0,7 /k. Il est voisin de Te, mais pas exactement égal (30 % inférieur).

La règle est donc très simple : si vous avez un taux de croissance de k par an, vous doublez votre quantité au bout de 0,7 /k . Si k est exprimé en "r %", il faut en fait considérér k = r/100, ce qui fait que le temps de doublement est de 0,7/(r/100) = 70 /r

Ce qui donne une "règle du pouce " extrêmement simple : une quantité croissant à r % par an double tous les 70/r ans.

****

Note qui peut etre sautée en première lecture ....

Il y a en réalité une petite approximation dans cette formule. En effet j'ai dit que k était la taux de croissance annuel, mais ce n'est pas tout à fait exact. Si on définit le taux de croissance annuel par la formule (en %)

r = 100 . (A(n+1)-A(n))/A(n)

où A(n) est la quantité à l'année n (au premier janvier par exemple) et A(n+1) à l'année n+1, on trouve que le vrai taux annuel est

r = 100. [exp(k) - 1] , soit k = ln(1+r/100).

il se trouve que exp(k) - 1 est "presque égal" à k pour les petits k, ce qui est nécessaire à la cohérence de la formule. La différence subtile entre les 2 est que k est le taux de croissance "en supposant que A soit resté constant pendant un an", (les mathématiciens parlent "d'approximation tangente"), alors que r/100 est le taux de croissance réel en tenant compte de la variation de A pendant cette année. La différence est minime pour les taux de croissance faibles (où A n'a presque pas bougé), mais elle peut devenir sensible pour les taux de croissance élevés. Pour des taux de croissance habituels de quelques % par an, on peut faire l'approximation précédente. Pour les taux plus élevés, mettons que 10 % par an, c'est plus exact de prendre une formule précise

T2 = 0,7/ln(1+r/100)

cette dernière formule étant inutilement compliquée si on veut avoir juste un ordre de grandeur, mais elle a l'avantage de s'étendre à n'importe quel taux même très rapide.

****

On définit souvent T2, mais en fait on peut définir un temps de multiplication par n'importe quel facteur X. Au bout de deux temps de doublements , on a par exemple une multiplication par 4, et donc T4 = 2.T2 = 140 /r. De façon générale, au bout de N temps de doublement, on a une multiplication par 2^N , et donc T(2^N) = N.T2 = N.70/r.

Par exemple en prenant N = 10, on a une mutiplication par 2^10 = 1024 soit environ 1000 (le "kilo" des informaticiens), au bout de 10 temps de doublement soit au bout de 700/r années.

Avant de conclure pour passer aux conséquences pratiques de ces formules, quelques remarques

a) On voit qu'une exponentielle peut etre caractérisée aussi bien par son taux de croissance, que par son temps de doublement (ou de multiplication par X quelconque). En réalité une exponentielle est entièrement caractérisée par une de ces quantités qui sont univoquement liées. Par exemple au lieu de "l'économie croit de 2% par an", on pourrait tout aussi bien dire "l'économie est sur un rythme de doubler en 70/2 = 35 ans". L'exponentielle EST un taux de croissance , et EST tout aussi bien un temps de doublement, d'une certaine manière, ce n'est QUE CA. Son seul paramètre libre qui la caractérise est le taux de croissance k, ou bien tous les temps associés. Il faut vraiment "penser" l'exponentielle comme "un temps de doublement caractéristique", si on veut vraiment réaliser ses propriétés.

b) toutes les formules précédentes s'appliquent aussi au cas où k est négatif, ou plutot en remplaçant dans l'équation k par -k. Dans ce cas la vitesse de variation est négative et la quantité A DECROIT au cours du temps : il s'agit d'une "décroissance exponentielle". C'est le cas par exemple de la radioactivité qui décroit exponentiellement avec le temps, les noyaux disparaissant petit à petit et le nombre de désintégration étant proportionnel à la quantité restante. Tout ce qui a été dit reste valable à quelques modifications près, et en particulier en remplaçant des multiplications par X par des divisions par X. Le temps T2 représente alors le "temps de demi-vie" où la quantité est DIVISEE par deux.

c) Il y a un cas limite trivial, celui où k = 0. Dans ce cas la vitesse de variation est nulle, ce qui signifie que A est stationnaire. Le régime stationnaire peut être considéré comme un cas limite de croissance exponentielle.... de taux de croissance nul, et de temps de doublement infini !

Published by climatenergie - dans Economie